1) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$

i) Να εκφράσετε τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό των I_3, A, A^2

ii) ΝΔΟ $A^{2006} - 2A^{2005} = A^2 - 2A$

ΛΥΣΗ

i) $\chi_A(x) = \det(A - Ix) = \det\begin{pmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ 0 & -2-x & -1 \\ 0 & 3 & 2-x \end{pmatrix} =$

$= (2-x)\cdot\det\begin{pmatrix} -2-x & -1 \\ 3 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)\cdot(-2-x)(2-x)+3 =$

$= -(2-x)^2(x+2) + 3 = -x^3 + 2x^2 + x - 2 = (x-1)(-x^2 + x - 2)$

Από θ. Cayley-Hamilton, έχουμε: $\chi_A(A) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -A^3 + 2A^2 + A - 2I_3 = 0$ ①

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \neq 0$

Άρα, στην ① αν πολ/σουμε με A^{-1} τότε:

$-A^3 A^{-1} + 2A^2 A^{-1} + A\cdot A^{-1} - 2A^{-1} = 0 \Rightarrow$

$-A^2 + 2A + I_3 - 2A^{-1} = 0 \Rightarrow$

$A^{-1} = \frac{1}{2}(-A^2 + 2A + I_3)$

ii) $-A^3 + 2A^2 + A - 2I_3 = 0 \Rightarrow A^3 - 2A^2 = A - 2I_3$

$(\cdot A)$ $A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A$

$(\cdot A)$ $A^5 - 2A^4 = A^3 - 2A^2 = A - 2I_3$

$(\cdot A)$ $A^6 - 2A^5 = A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A$

$\vdots$

Με επαγωγή στο n: $A^{2n} - 2A^{2n-1} = A^2 - 2A$, $n \geq 2$ (Αποδεικνύεται)

Άρα, $A^{2006} - 2A^{2005} = A^2 - 2A$

2) Έστω $\chi_A(x) = -x^3+2x-3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Να Απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A^6-2A^4+2A^3+3A-2I_3.$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x)=x^6-2x^4+2x^3+3x-2$
και το διαιρούμε με το $\chi_A(x) = x^3-2x+3$
(Παρατήρηση → τα πρόσημα δεν μας ενδιαφέρουν στο $\chi_A(x)$ αλλά οι ρίζες)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^6}-\cancel{2x^4}+2x^3+3x-2 & x^3-2x+3 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^6}+\cancel{2x^4}-3x^3 & x^3-1 \\ \cline{1-1} \qquad -\cancel{x^3}+3x-2 & \\ \qquad +\cancel{x^3}-2x+3 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad x+1 & \end{array}$$

$$\boxed{P(x) = (x^3-2x+3)(x^3-1)+(x+1)}$$

Αλλά $\underbrace{\chi_A(A)=0}_{\text{Cayley-Hamilton}} \Rightarrow P(A) = \cancel{\chi_A(A)\,(A^3-I_3)}^{\,0}+(A+I_3) = A+I_3.$

3) Να Υπολογιστεί η τιμή του πίνακα:

$A^{10}\cdot(A-2I_2)^{11}$, όπου $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ

Το $\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix}-1-x & 2\\ -2 & 3-x\end{pmatrix} = (-1-x)(3-x)+4 = x^2-2x+1$

Από Θ. Cayley-Hamilton $\rightsquigarrow$ $\chi_A(A)=0 \Rightarrow A^2-2A+I_2=\mathbb{O} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2-2A=-I_2 \Rightarrow A(A-2I_2)=-I_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{10}\cdot(A-2I_2)^{10} = I_2 \Rightarrow A^{10}\cdot(A-2I_2)^{11} = I_2\cdot(A-2I_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{10}\cdot(A-2I_2)^{11} = A-2I_2 = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$

4) Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

i) Να βρεθεί ένα $\varphi(x)\in\mathbb{R}[x]$ βαθμού το πολύ ένα:

$$A^7-3A^6+3A^5+5A^4+A=\varphi(A)$$

ii) Να υπολογίσετε τον πίνακα $A^{2003}\cdot(A-2I_2)^{2004}$

iii) Να εκφράσετε τον A^{-1} ως γραμμ. συνδυασμό των I_2 και A

iv) " " " A^3 " " " " " "

ΛΥΣΗ

i) Βρίσκω το $\chi_A(x)=\det\begin{pmatrix}1-x & 2-x\\ -2-x & 1-x\end{pmatrix}=$

$=(1-x)^2+4=x^2-2x+5$

$\chi_A(A)=A^2-2A+5=0$ ← Caylay-Hamilton

και θεωρώ $P(x)=x^7-3x^6+3x^5+5x^4+x$

Κάνοντας τη διαίρεση ανάμεσα στα $\chi_A(x)$ και $P(x)$ θα πάρουμε:

$P(x)=\chi_A(x)\cdot(x^5-x^4-4x^3+2x^2+24x+38)+43x+190$

$P(A)=\cancel{\chi_A(A)(A^5-A^4-4A^3+2A^2+24A+38)}+43A+190$ → 0

$P(A)=43A+190$

ii) $\chi_A(A)=A^2-2A+5I_2=0 \Rightarrow A^2-2A=-5I_2\Rightarrow$

$\Rightarrow A(A-2I_2)=-5I_2$ (ισχύει $A\cdot(A-2I_2)=(A-2I_2)\cdot A$)

$A^{2003}\cdot(A-2I_2)^{2003}=(-5)^{2003}I_2$

$A^{2003}\cdot(A-2I_2)^{2004}=(-5)^{2003}I_2\cdot(A-2I_2)=(-5)^{2003}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -4 & -1\end{pmatrix}$

iii) $A^2-2A+5I_2=0\Rightarrow A-2I_2+5A^{-1}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 5A^{-1}=2I_2-A\Rightarrow A^{-5}=\frac{1}{5}(2I_2-A)$

iv) $A^2-2A+5I_2=0\Rightarrow A^3-2A^2+5A=0\Rightarrow$

$\Rightarrow A^3-2(2A-5I_2)+5A=0\Rightarrow$

$\Rightarrow A^3-4A+10I_2+5A=0\Rightarrow$

$\Rightarrow A^3=-A-10I_2$.